Lösung: Serie 7

1. Kompaktheit im euklidischen Raum

Wenn (E, d) ein metrischer Raum ist, dann heisst eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy* wenn $d(x_n, x_m) \to 0$ für $\min(n, m) \to \infty$. Eine Teilmenge $A \subset E$ heisst *vollständig* wenn jede Cauchyfolge in A konvergiert, mit Limes in A. Eine Teilmenge $A \subset E$ heisst *total beschränkt* wenn A, für jedes $\epsilon > 0$, von endlich vielen Bällen mit Radius ϵ überdeckt werden kann. Wir tragen ein paar relevante Resultate zusammen:

0) Wenn (E, d) ein metrischer Raum ist und $A \subset E$, dann gilt:

$$x \in \bar{A} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A : \; d(x, x_n) \to 0.$$

a) Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt wenn er total beschränkt und vollständig ist.

b) Jede total beschränkte Teilmenge eines metrischen Raums ist beschränkt.

c) Jede vollständige Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen.

d) Jede abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums ist vollständig.

e) Jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ ist total beschränkt.

Die Standardtopologie des euklidischen Raums $\mathbb{R}^d$ ist die durch die euklidische Metrik (siehe Serie 1, Aufgabe 4) induzierte Topologie. Kompaktheit einer Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ bezüglich dieser Topologie bedeutet Kompaktheit dieser Teilmenge als metrischer Raum (mit der auf diese Teilmenge eingeschränkte euklidische Metrik). Aus (a-e) folgt nun dass eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ genau dann in $(\mathbb{R}^d, \mathcal{T}_{\text{eukl}})$ kompakt ist wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.
Bemerkung. Wenn $A \subset \mathbb{R}^d$ in $(\mathbb{R}^d, \mathcal{T}_{\text{eukl}})$ kompakt ist, dann folgt die Abgeschlossenheit von A alternativ aus Aufgabe 5b, denn $(\mathbb{R}^d, \mathcal{T}_{\text{eukl}})$ ist Hausdorff.

Beweis von (0-e). Es sei (E, d) ein metrischer Raum, wir versehen ihn standardmässig mit der Metrik-induzierten Topologie $\mathcal{T}_d$.
(0) "$\Rightarrow$": Sei $x \in \overline{A}$. Setze $U_k := B(x, k^{-1})$ für $k \in \mathbb{N}$. Es gilt $U_k \subset U_j$ für $k > j$; wenn $V \in \mathcal{T}_d$ dann existiert $J \in \mathbb{N}$ so dass $U_J \subset V$. Weil $x \in \overline{A}$ haben wir $U_j \cap A \neq \emptyset$ für alle j. Wähle $x_j \in U_j \cap A$; wegen der obigen Eigenschaft von $\{U_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ existiert für jede offene Umgebung V von x eine Zahl $J \in N$ so dass $x_j \in U_j \subset U_J \subset V$ für alle $j > J$, das heisst $x_j \to x$ (mit $\{x_j\} \subset A$).
Kontraposition von "$\Leftarrow$": Wenn $x \notin \overline{A}$ und $\{x_j\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A ist, dann ist $(\overline{A})^c$ eine offene Umgebung von x welche kein x_j enthält, also $x_j \nrightarrow x$.

(a) Siehe Vorlesung.
(b) Angenommen $A \subset E$ ist total beschränkt. Dann existiert $\epsilon > 0$ und Punkte $z_1, \ldots, z_n \in A$ so dass $A \subset \bigcup_1^n B(\epsilon, z_j)$. Wenn $x, y \in \bigcup_1^n B(\epsilon, z_j)$, sagen wir $x \in B(\epsilon, z_1)$ und $y \in B(\epsilon, z_2)$, dann gilt

$$d(x,y) \leq d(x,z_1) + d(z_1,z_2) + d(z_2,y) \leq 2\epsilon + \max\{d(z_j,z_k) : 1 \leq j,k \leq n\}.$$

Also ist A beschränkt, das bedeutet der Durchmesser ist endlich,

$$(A) := \sup\{d(x,y) : x,y \in A\} \leq 2\epsilon + \max\{d(z_j,z_k) : 1 \leq j,k \leq n\} < \infty.$$

(c) Angenommen $A \subset E$ ist vollständig. Wenn $x \in \overline{A}$, dann existiert nach (0) eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in A welche gegen x konvergiert. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy, also liegt auch ihr Limes in A, denn A ist vollständig; folglich gilt $A = \overline{A}$.
(d) Wenn E vollständig, $A \subset E$ abgeschlossen, und $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in A ist, dann hat $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einen Limes in E. Wegen (0) gilt $x \in \overline{A} = A$; also ist A vollständig.
(e) Hierfür genügt es zu zeigen dass für jedes $M > 0$, $[-M,M]^d \subset \mathbb{R}^d$ total beschränkt ist. In der Tat, wenn $\epsilon > 0$, dann ist

$$\bigcup_{y \in \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}\mathbb{Z}^d \cap [-(M+\epsilon), M+\epsilon]} B(y,\epsilon)$$

eine endliche Überdeckung von $[-M,M]^d$ mit ϵ-Bällen. $\square$

2. Extremwertsatz

Wenn $f \in C(E,\mathbb{R})$ wobei $(E,\mathcal{T})$ kompakt ist, dann ist $\text{Bild}(f) \subset \mathbb{R}$ kompakt. Wir müssen zeigen dass $\text{Bild}(f)$ ein grösstes und ein kleinstes Element besitzt; dann sind wir fertig. Wenn $\text{Bild}(f)$ kein grösstes Element hat, dann bildet die Kollektion $\{(-\infty, y) : y \in \text{Bild}(f)\}$ eine offene Überdeckung des kompakten Bildes $\text{Bild}(f) \subset \mathbb{R}$, es existiert also eine endliche Teilüberdeckung $\{(-\infty,y_1),\ldots,(-\infty,y_n)\}$ von $\text{Bild}(f)$. Aber $y := \max(y_1,\ldots,y_n) \in \text{Bild}(f)$ gehört zu keiner dieser Mengen, im Widerspruch zur Tatsache dass sie $\text{Bild}(f)$ überdecken. Folglich besitzt das Bild von f ein maximales Element. Weil auch $-f \in C(X,\mathbb{R})$ hat $\text{Bild}(f)$ ein minimales Element, nämlich minus das maximale Element von $\text{Bild}(-f)$.

3. Abgeschlossene Teilmengen von kompakten Räumen

Es sei $(E,\mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum. Wenn $F \subset E$ abgeschlossen ist, und $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine Familie von offenen Mengen in $(E,\mathcal{T})$ ist mit $F \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$, dann ist $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \cup \{F^c\}$ eine offene Überdeckung von E. Weil E kompakt ist, besitzt es eine endliche Teilüberdeckung, also bekommen wir, durch Weglassen von F^c in letzterer Überdeckung wenn nötig, eine endliche Teilkollektion von $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ welche F überdeckt.

4. Kompakte Teilmengen von Hausdorffräumen

(a) Wenn $(E, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum ist und $x \notin F \subset E$, dann existieren für jedes $y \in F$ disjunkte offene Mengen $U_y, V_y \in \mathcal{T}$ mit $x \in U_y$ und $y \in V_y$. Offensichtlich ist $\{V_y\}_{y \in F}$ eine offene Überdeckung von F, sie besitzt also eine endliche Teilüberdeckung $\{V_{y_j}\}_1^n$ wenn F kompakt ist. Damit haben $U := \bigcap_1^n U_{y_j}$ und $V := \bigcup_1^n V_{y_j}$ die gewünschten Eigenschaften: $U, V \in \mathcal{T}$ mit $x \in U$ und $F \subset V$.
(b) Wenn F eine kompakte Teilmenge des Hausdorffraum $(E, \mathcal{T})$ ist, dann ist F^c eine Umgebung jeder ihrer Punkte, also offen: in der Notation von (a), für jedes $x \notin F$ $\exists$ offene U $[, V]$ so dass $x \in U [\subset V^c] \subset F^c$.

5. Abgeschlossene Abbildungen

Wenn $F \subset E$ abgeschlossen, dann ist F kompakt (siehe Aufgabe 3, denn E ist kompakt), also ist $f(F)$ kompakt (weil f stetig) und darum abgeschlossen (siehe Aufgabe 4, denn E' ist Hausdorff).

6. Lebesgue Zahl Lemma

Wenn $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung des kompakten Raum E ist, so existiert eine endliche Teilkollektion $\{U_1, \ldots, U_n\}$ von $\mathcal{U}$ welche E überdeckt. Wir dürfen annehmen dass keine der U_i's gleich E ist (nämlich wenn $E \in \mathcal{U}$ sind wir sowiso fertig), jede der Mengen $C_i := U_i^c$ ist also nichtleer. Betrachte die Funktion

$$f : E \to \mathbb{R}, \quad x \to f(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i).$$

Beachte dass $f(x) > 0$ für alle $x \in E$. Nämlich wenn $x \in E$, wähle erstens i so dass $x \in U_i$, und zweitens wähle $\epsilon > 0$ so dass $B(x, \epsilon) \subset U_i$ (nämlich U_i ist offen); dann gilt $d(x, C_i) \geq \epsilon$ und $f(x) \geq \epsilon/n$. Weiter ist f stetig, wegen der Stetigkeit der Abbildungen $E \to [0, \infty)$, $x \mapsto d(x, C_i)$, und wegen der Vektorraumstruktur von $C(E, \mathbb{R})$. Folglich, weil E kompakt ist, besitzt f einen Minimalwert $\delta > 0$ nach dem Extremwertsatz (Aufgabe 2).
Wenn nun $B \subset E$ mit $\operatorname{diam}(B) < \delta$, dann wähle $x_0 \in B$ und beachte dass $B \subset B(x_0, \delta)$. Wähle m so dass $d(x_0, C_m) = \max_{1 \leq i \leq n} d(x_0, C_i)$. Dann gilt $B(x_0, \delta) \subset U_m$, nämlich $d(x_0, C_m) \geq f(x_0) \geq \delta$. Also gilt $B \subset B(x_0, \delta) \subset U_m$, und wir sind fertig.